www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE — Mai 1989

CONCOURS EXTERNES DE RECRUTEMENT
DES INGENIEURS DES ETUDES ET DE L'EXPLOITATION DE L'AVIATION CIVILE
C.F. et C.T.

Epreuve commune de MATHEMATIQUES Durée : 3 heures Coef. : 1

Remarque : Les candidats sont autorisés à admettre les résultats que l'on demande d'établir dans une question pour en traiter une autre.

Notations utilisées :

i est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$; si z est un complexe, son imaginaire conjugué est noté $\overline{z}$.

Si A et B désignent des endomorphismes d'un espace vectoriel, on désigne par AB , A^2 et B^2 , respectivement, les produits de composition d'endomorphismes AoB , AoA et BoB .

On désigne par $\mathcal{T}$ l'espace vectoriel complexe des fonctions polynomiales p , à coefficients complexes, de la variable réelle x :

$$p : x \longrightarrow p(x)$$

On désigne par p' la dérivée de p .

1. Soit p et q des éléments de $\mathcal{T}$ et e la base des logarithmes népériens. Etablir la convergence de l'intégrale impropre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, p(x)\, \overline{q(x)}\, dx$$

2. On définit sur $\mathcal{T}$ un produit scalaire s par :

$$s : (p,q) \longrightarrow s(p,q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, p(x)\, \overline{q(x)}\, dx .$$

Vérifier les propriétés suivantes de s :

a) $s(p,q) = \overline{s(q,p)}$

b) $s(p,p) \geqslant 0$

c) pour p fixé dans $\mathcal{T}$, s définit une forme semi-linéaire sur $\mathcal{T}$.

Démontrer que $s(p,p) = 0$ implique que p est la fonction polynômiale nulle 0 .

3. Soit A et B les applications de $\mathcal{T}$ dans l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions complexes de la variable réelle x , définies par :

$$A : p \longrightarrow A(p) \text{ , avec } : \Big(A(p)\Big)(x) = x\,p(x) ,$$

$$B : p \longrightarrow B(p) \text{ , avec } : \Big(B(p)\Big)(x) = i\Big(p'(x) - x\,p(x)\Big).$$

Montrer que A et B sont des endomorphismes de $\mathcal{T}$ et que :

$$s\Big(A(p)\ ,\ q\Big) = s\Big(p\ ,\ A(q)\Big) ,$$

$$s\Big(B(p)\ ,\ q\Big) = s\Big(p\ ,\ B(q)\Big) .$$

4. Soit C l'application de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{F}$ définie par

$$C : p \longrightarrow C(p) \text{ , avec } : \Big(C(p)\Big)(x) = \frac{1}{2}\Big(A^2(p)\Big)(x) + \frac{1}{2}\Big(B^2(p)\Big)(x) .$$

a) Montrer que C est un endomorphisme de $\mathcal{T}$.
On rappelle alors que dans l'espace vectoriel complexe $\mathcal{E}$ des endomorphismes de $\mathcal{T}$ on a pour la loi d'addition :

$$C = \frac{1}{2}(A^2 + B^2) .$$

b) Montrer que : $s\Big(C(p)\ ,\ q\Big) = s\Big(p\ ,\ C(q)\Big)$.

c) Démontrer que, <u>si elle existe</u>, toute valeur propre de C est nécessairement réelle et que, si p et q sont des vecteurs propres de C associés respectivement à deux valeurs propres <u>distinctes</u>, on a nécessairement : $s(p\ ,\ q) = 0$,

pour démontrer simplement ces deux dernières propriétés n'utiliser que les propriétés de s et de C établies précédemment.

TSVP

5. a) Ecrire $C(p)$ à l'aide de x, p et de dérivées de p.

b) Supposant qu'il existe une valeur propre λ de C, écrire une équation différentielle E_λ que vérifie tout vecteur propre de C associé à λ.

c) En déduire que, s'il existe une valeur propre λ de C, on peut écrire que :

$\lambda = n + \frac{1}{2}$ où n est entier, positif ou nul.

On écrira E_n au lieu de E_λ dans la suite du problème.

6. a) On suppose que E_n est vérifiée par une fonction polynôme P_n de degré n. Dériver le premier membre de E_{n+1} et montrer que l'on peut déterminer la constante k pour que la fonction :

$$P_{n+1} : x \longrightarrow P_{n+1}(x) = \int_0^x P_n(t)\, dt + k$$

soit solution de E_{n+1}.

b) En déduire les ensembles respectifs des valeurs propres et des vecteurs propres de C.

7. 1 désigne l'endomorphisme identité de $\mathcal{T}$.

On définit dans $\mathcal{E}$ les endomorphismes de $\mathcal{T}$:

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} (A + i B),$$

$$\overline{D} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A - i B).$$

a) Exprimer $D\overline{D}$ et $\overline{D}D$ en fonction de C et 1.

b) Soit p un vecteur propre associé à la valeur propre λ de C.

Montrer que :

$$s\left(\overline{D}(p), \overline{D}(p)\right) = (\lambda - \tfrac{1}{2})\, s(p, p),$$

Montrer qu'on a l'alternative :

ou bien $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\overline{D}(p) = 0$, 0 étant la fonction polynômiale nulle,

ou bien $\lambda > \frac{1}{2}$ et $\overline{D}(p)$ est un vecteur propre de C dont on donnera la valeur propre correspondante.

c) Retrouver ainsi l'ensemble des valeurs propres de C.

d) Calculer $\overline{D}(p)$.

8. Soit $\mathcal{C}$ un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire s ayant les propriétés étudiées à la question 2.

Soit P et Q deux endomorphismes de $\mathcal{C}$ vérifiant :

$$s(P(u), v) = s(u, P(v)) \quad \text{et} \quad s(Q(u), v) = s(u, Q(v))$$

où u et v sont les éléments de $\mathcal{C}$.

On pose :

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} (P + iQ), \quad \overline{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (P - iQ) \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2)$$

Etendre à $\overline{R}$ et S les propriétés de $\overline{D}$ et C établies aux questions 7. b) et 7. c).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail